Exercise 15.

取测地极坐标系，(ρ, θ).

$I = d\rho^2 + G d\theta^2$，其中 $\lim\limits_{\rho\to 0} \sqrt{G} = 0$ $\lim\limits_{\rho \to 0} (\sqrt{G})_\rho = 1$

$$K = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}}.$$

(. $I = \omega_1\omega_1 + \omega_2\omega_2$. 其中 $\omega_1 = d\rho$. $\omega_2 = \sqrt{G}\, d\theta$.

$\omega_{12} = (\sqrt{G})_\rho\, d\theta$.

$$K = -\frac{d\omega_{12}}{\omega_1 \wedge \omega_2} = -\frac{(\sqrt{G})_{\rho\rho}}{\sqrt{G}} \ ).$$

$A(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, d\rho\, d\theta$. $L(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G}\, d\theta$ (L以θ作为测地圆的参数)

$$\lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} \overset{\text{L'Hospital}}{=\!=\!=} \lim_{r\to 0} \frac{2\pi - \int_0^{2\pi} (\sqrt{G})_r\, d\theta}{2\pi r^2} = \lim_{r\to 0} \frac{\int_0^{2\pi} (1 - (\sqrt{G})_r)\, d\theta}{\pi r^2}$$

$$\overset{\text{L'Hospital}}{=\!=\!=} \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} \frac{-(\sqrt{G})_{rr}}{2\pi r}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lim_{r\to 0} \frac{-(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} \cdot \frac{\sqrt{G}}{r}\, d\theta = K(p).$$

$$\left(\frac{-(\sqrt{G})_{rr}}{\sqrt{G}} \to K(p) \text{，而 } \frac{\sqrt{G}}{r} \to 1 \right).$$

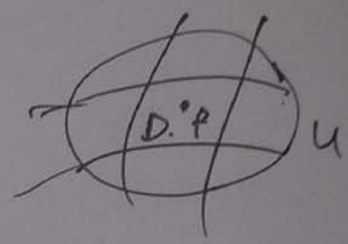
$$\lim_{r\to 0} \frac{12}{\pi} \frac{\pi r^2 - A(r)}{r^4} \overset{\text{L'Hospital}}{=\!=\!=} \lim_{r\to 0} \frac{3}{\pi} \frac{2\pi r - L(r)}{r^3} = K(p).$$

2. 课本P127，给出了常Gauss曲率曲面在测地极坐标下的I的表达式.
再结合 P117. Liouville公式直接代入即可.

3. 易证：$K=0$.

否则设$K(p)\neq 0$. 不妨设$K(p)>0$. 则在p的个邻域U内$K(Q)>0$;$(Q\in U)$.

如图取一个小的"矩形"D,



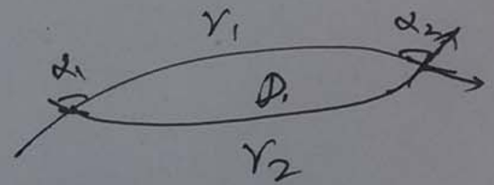
并对K积分，由Gauss-Bonnet公式

$$0<\int_D K\,dA+\sum\alpha_i=2\pi,$$

因测地线围成四角，外角和$\sum\alpha_i=2\pi$. 矛盾.

但为什么可展？

4. 反证，若相交，



$$0>\int_D K\,dA.$$

但由Gauss-Bonnet公式.

$$\int_D K\,dA=2\pi-(\alpha_1+\alpha_2)$$ 因$\alpha_i\ (i=1,2)<\pi$. 右边>0 矛盾,

"这说明负曲率曲面"将测地线推开".

正曲率当然可以相交. 比如S^2.

5. $D=\{(u,v)\mid v>0\}\longrightarrow \tilde{D}=\mathbb{R}^2$.

$(u,v)\longmapsto(\tilde{x},\tilde{y})=(-a\ln v,\ au)$.

怎么找这个变换？先不管三七二十一，把D变成$\tilde{D}$，当然就是对数了，

然后再调整..

$E = G = v \quad F = 0$ 、从而是正交参数.

$E_u = G_u = 0 \qquad E_v = G_v = 1,$

由 Liouville 公式

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{2v}\frac{du}{ds} \qquad ①.$$

而. $du/ds = \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{v}}. \qquad dv/ds = \dfrac{\sin\theta}{\sqrt{v}}.$

$$\Rightarrow \quad \sin\theta\, du = \cos\theta\, dv \quad ②.$$

由①②. $\tan\theta\, d\theta = \dfrac{dv}{2v}$ 即 $d(\ln\cos\theta) = \dfrac{1}{2}d\ln v.$

从而. $\cos\theta = \dfrac{c}{\sqrt{v}}.$

$$\frac{du}{dv} = \frac{c}{\sqrt{v-c^2}}$$

$$du = \frac{c\, dv}{\sqrt{v-c^2}}.$$

$$u = 2c\sqrt{v-c^2}. \qquad u^2 = 4c^2(v-c^2).$$

为 uv 平面上的测地线.

Gauss - Bonnet, 结合外角 $\alpha_i \le \pi$..

旋转面上纬线的测地曲率: 习题五: 11.

旋转面 Gauss 曲率: P60.